



REFINAMENTO P-ADAPTATIVO APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Wesley Michel de Barros¹

wesleymef@gmail.com

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro¹

paulo.vribeiro@ufpe.br

Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil

Neste trabalho é apresentado um código computacional para análise de estruturas não convencionais com auxílio de computador aplicando o Método P-Adaptativo a problemas envolvendo elasticidade bidimensional, de modo a fornecer ao usuário as características do comportamento da estrutura de forma a facilitar a escolha da melhor solução estrutural. As técnicas de refino de malha mais usuais são os métodos adaptativos H, P e HP, em que o método H mantém constante a ordem do polinômio da função Hermitiana e eleva o número de elementos de forma a minimizar o erro, por sua vez, o método P mantém constante o número de elementos e eleva a ordem do polinômio das funções de interpolação para uma melhor aproximação da solução, o terceiro método é o HP, sendo este a combinação dos dois métodos anteriores.

Para elevar a precisão dos resultados foi aplicado o Método P-Adaptativo, onde foram formulados elementos finitos planos de ordem superior. No presente trabalho, a ordem do polinômio das funções Hermitianas é incrementada para construção dos elementos T6(6 nós), T10(10 nós), T15(15 nós) e T21(21 nós). A grande vantagem dos elementos de ordem superior é a maior precisão dos resultados à medida que a ordem do polinômio aumenta. Assim, são necessários menos elementos que o método H-Adaptativo para solução do problema, reduzindo a necessidade de discretização adicional do domínio.

As aplicações utilizando elementos finitos planos de ordem superior apresentam elevado custo computacional, visto que as matrizes dos elementos são obtidas por integração numérica, elevando dessa forma o tempo de processamento. De modo a solucionar esse problema foram desenvolvidas matrizes de rigidez explícitas,

eliminando as integrações numéricas e maximizando a eficiência do processamento computacional.

Aplicações práticas em um código computacional para análise estática de estruturas foram desenvolvidas com auxílio do software MATLAB, onde o usuário informa uma discretização inicial com elementos triangulares de três nós (T3) e define a ordem do polinômio a ser aplicado. Por sua vez, o programa se encarrega de gerar os novos nós e conectividades de acordo com o grau do polinômio escolhido. Em seguida, o usuário define as condições de contorno e cargas aplicadas, para posterior solução de deformações e tensões. Exemplos de validação são apresentados e confirmam a eficiência em desempenho computacional das rotinas propostas.

Palavras-chave: elementos finitos, elasticidade bidimensional, método p-adaptativo, estática.

1 INTRODUÇÃO

Projetos de arquitetura e estrutura cada vez mais ousados tornam imprescindível o trabalho em conjuntos, especialmente em estruturas com formas que fogem do convencional. Porém, a análise de estruturas complexas torna-se complicada, sendo necessário recorrer a métodos numéricos com auxílio de programas computacionais. O código desenvolvido neste trabalho permite a análise das mais diversas formas estruturais, fornecendo dados do comportamento da estrutura de modo a auxiliar o usuário na escolha da melhor solução estrutural.

O método dos elementos finitos foi aplicado ao código desenvolvido neste trabalho, pois o MEF possui a grande vantagem de sua linguagem ser facilmente aplicada a sistemas computacionais, possibilitando a solução de problemas complexos com maior precisão. O MEF consiste na discretização do sistema estrutural em pequenos subdomínios chamados elementos finitos, que são conectados entre si por nós e cada elemento mantém as mesmas propriedades da estrutura completa.

Com o objetivo de aperfeiçoar a precisão das análises estruturais foi elaborado um código computacional com auxílio do software MatLab onde foi aplicado o método p-adaptativo para elementos finitos planos, o qual tem por objetivo a determinação do campo de deslocamento e tensões atuantes em um sistema sob a ação de cargas externas. O método p-adaptativo consiste no aumento do grau do polinômio de modo a elevar a precisão do elemento mantendo a malha inicial “mais simples”, evitando a necessidade de discretização adicional do domínio. Porém, o custo computacional é maior à medida que se eleva o grau das funções de interpolação devido tanto às integrações quanto ao aumento da ordem das matrizes do sistema, diante disto surgiram vários estudos visando contornar esse problema.

A solução adotada por Anyaegbunam e Ojiako (2011), foi a utilização da matriz explícita para o elemento triangular com 15 nós, evitando dessa forma a integração convencional, consequentemente, reduzindo o custo computacional. Pesquisas como as desenvolvidas por Moser e Swoboda (1977), e Subramaniant e Jeyachandra (1981), tiveram conclusões semelhantes.

Griffiths, et al (2009), por sua vez, optaram pelo método utilizando integração numérica para elementos triangulares até 15 nós. Neste método são feitas substituições de valores em pontos com pesos de acordo com a ordem do elemento, evitando assim a

integração convencional. Porém, Videla, et al (1996) indicaram o ganho computacional com a utilização de matrizes explícitas, em comparação ao método da integração numérica (quadratura de gauss).

Segundo Novotny e Fancello (1996), o método p-adaptativo é adequado a problemas em que a solução não possui pontos de singularidade. Neste caso, o erro decresce exponencialmente com o aumento da ordem polinomial dos elementos, sendo esse o método mais eficiente nessa situação. Porém, em regiões que apresentam singularidades, os resultados podem oscilar. Nesse caso, a região com singularidade deve ser adequadamente discretizada (refino h) antes de aplicar o método p-adaptativo.

Baseando-se na pesquisa bibliográfica, será elaborado um código computacional para análise de estruturas complexas, utilizado o método com matrizes explícitas evitando, dessa maneira, tanto as integrações analíticas, quanto reduzindo o número de processamento no caso do método da integração numérica.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

As principais propriedades, equações e relações constitutivas da elasticidade bidimensional são itens de fundamental importância aos estudos das deformações e tensões nos materiais que compõem as estruturas. Diante disso, vários autores a exemplo de Villaça e Garcia (2000), detalham suas formulações.

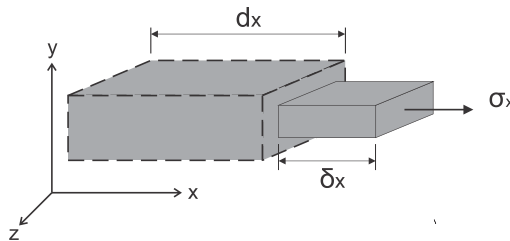


Figura 1a - deformações devido à tensão no eixo x

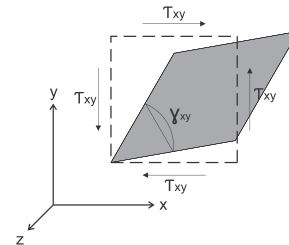


Figura 1b – distorção angular

Considerando a Figura 1a com deformações apenas no eixo X podemos observar que a peça sofreu um alongamento na direção da tensão, sendo também perceptível que o material sofreu um encurtamento lateral na direção do eixo Y e Z. Esse encurtamento lateral é representado pelo módulo de Poisson “v”, sendo que este é determinado através de ensaios de laboratório. O material também pode sofrer uma distorção angular em decorrência das tensões de cisalhamento, conforme mostrado na Figura 1b. De forma simplificada a matriz constitutiva do material é dada por:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1)$$

Na elasticidade bidimensional pode-se trabalhar com plano de tensões ou plano de deformações. Para o **estado plano de tensões** existem tensões em apenas duas direções. Logan (2006) define que para o estado plano de tensões a tensão normal e de cisalhamento perpendiculares ao plano do elemento são nulas, resultando para tensões:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para o **estado plano de deformações** existem deformações em apenas duas direções. Logan (2006) define que para estado plano de deformações as deformações perpendiculares ao eixo x-y são nulas, sendo essa premissa válida para corpos longos na direção do eixo z, resultando para tensões:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Relações entre deslocamentos e deformação

Conforme Villaza e Garcia (2000) admite-se a hipótese de pequenas mudanças de configuração para relação entre as componentes de deformação e de deslocamento. Por essa hipótese, as deformações e rotações sofridas pelos segmentos elementares são consideradas muito pequenas em presença da unidade. Como consequência, as relações deformação-deslocamento podem basear-se em projeções sobre os planos coordenados, dos segmentos elementares na configuração deformada que originalmente tinham a direção dos eixos.

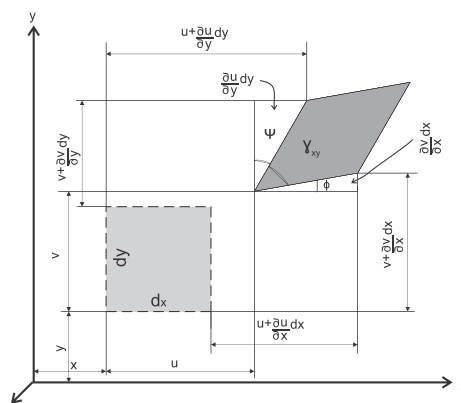


Figura 2 - Deformações e deslocamentos
Fonte: Villaza e Garcia, 2000, p.31.

Supondo que um corpo sofra deformações e deslocamentos conforme a Figura 2, podemos obter as seguintes expressões, onde sua dedução é apresentada por Villaza e Garcia (2000):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS PLANOS

O Método dos Elementos Finitos é aplicado nas mais diversas análises estruturais, mas sua importância fica mais evidente nas aplicações em estruturas complexas onde os métodos analíticos não podem resolver o problema sem grandes simplificações.

O método dos elementos finitos consiste na divisão da estrutura sob análise em vários pequenos subdomínios com as mesmas propriedades da estrutura completa. O cálculo é feito para cada elemento onde os nós incomuns aos elementos adjacentes possuem os mesmos deslocamentos.

A Figura 3 mostra um esquema simplificado para análise das tensões atuantes em um ponto qualquer de uma estrutura plana. Temos as seguintes etapas de elaboração do MEF para elementos planos (RIBEIRO, 2015):

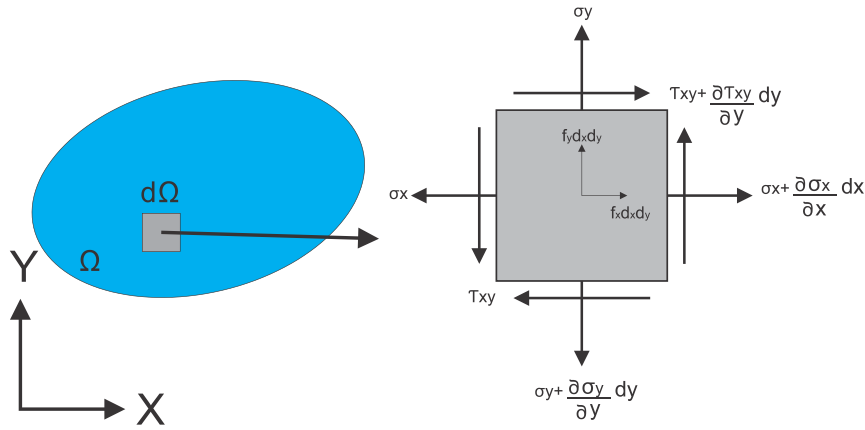


Figura 3 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de um contínuo

Fonte: RIBEIRO, 2015, p.1.

Para estrutura em equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \quad (5)$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dx + f_x dx dy = 0 \quad (6)$$

Simplificando os termos temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (7)$$

Por analogia temos para o eixo y:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (8)$$

Sendo as expressões (7) e (8) as equações governantes do problema.

Aplicando o método de Galerkin, e como na direção do eixo z a espessura é constante igual a “t”, temos:

$$t \iint \left\{ \begin{matrix} w_1 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ w_2 \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \end{matrix} \right\} dx dy + \iiint \left\{ \begin{matrix} w_1 f_x \\ w_2 f_y \end{matrix} \right\} dx dy dz \quad (9)$$

Aplicando integração por partes no primeiro termo, obtemos:

$$-t \iint \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y \end{matrix} \right\} dx dy + t \int \left\{ \begin{matrix} w_1 \sigma_x \\ w_2 \tau_{xy} \end{matrix} \right\} dy - t \iint \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} \end{matrix} \right\} dx dy + t \int \left\{ \begin{matrix} w_1 \tau_{xy} \\ w_2 \sigma_y \end{matrix} \right\} dx \quad (10)$$

Simplificando os termos e adicionando o segundo termo da equação (9), ficamos com:

$$\left\{ -t \int_A \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} \end{matrix} \right\} dA \right\} + \left\{ \int_r \left\{ \begin{matrix} w_1 q_x \\ w_2 q_y \end{matrix} \right\} dr \right\} + \left\{ \int_V \left\{ \begin{matrix} w_1 f_x \\ w_2 f_y \end{matrix} \right\} dV \right\} = 0 \quad (11)$$

Sendo o primeiro termo da equação (11) a matriz de rigidez, o segundo termo as forças nodais equivalentes e o terceiro termo as forças de corpo.

Para determinação da matriz de rigidez tomamos o primeiro termo da expressão (11) e aplicando (1), temos:

$$t \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dA \quad (12)$$

De (4) sabe-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Aplicando (13) em (12) resulta em:

$$t \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} dA \quad (14)$$

Sendo:

$$u(x, y) = H_1(x, y)u_1 + H_2(x, y)u_2 + \dots + H_i(x, y)u_i \quad (15)$$

$$v(x, y) = H_1(x, y)v_1 + H_2(x, y)v_2 + \dots + H_i(x, y)v_i \quad (16)$$

$$w_{1(i)} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial u_i} \quad e \quad w_{2(i)} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial v_i} \quad (17)$$

Temos de forma genérica substituindo (15) e (16) em (13) e aplicando (17) em (12) ficamos com as expressões a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (19)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_{1(1)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w_{1(2)}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial w_{1(i)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_{2(1)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w_{2(2)}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial w_{2(i)}}{\partial y} \\ \frac{\partial w_{1(1)}}{\partial y} & \frac{\partial w_{2(1)}}{\partial x} & \frac{\partial w_{1(2)}}{\partial y} & \frac{\partial w_{2(2)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial w_{1(i)}}{\partial y} & \frac{\partial w_{2(i)}}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial H_i}{\partial y} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial y} & \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dessa forma, temos a expressão para matriz de rigidez de elementos bidimensionais:

$$[K] = t \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (21)$$

4 FORMULAÇÃO EXPLÍCITA PARA MATRIZES DOS ELEMENTOS

O tempo de processamento para códigos utilizando elementos finitos de ordem superior é bastante elevado devido às constantes integrações para montagem das matrizes globais. Os estudos desenvolvidos por Anyaegbunam e Ojiako (2011), Moser e Swoboda (1977), Subramaniant e Jeyachandra (1981) e Videla, et al (1996), mostraram que o problema pode ser contornado a partir da formulação matrizes explícitas para os elementos de ordem superior, evitando assim a integração numérica durante o processamento dos dados.

Em estruturas planas cada nó possui dois graus de liberdade, sendo eles os deslocamentos no eixo X e Eixo Y. Conforme Assan (2003), é necessário transformar as coordenadas cartesianas em coordenadas de área para em seguida deduzir as funções Hermitianas em função de coordenadas de área.

Nas coordenadas de área tomamos um ponto no interior do elemento triangular e dividindo-o assim em três áreas (A_1 , A_2 e A_3) conforme Figura 4, onde a altura de cada triângulo interno é uma proporção da altura total.

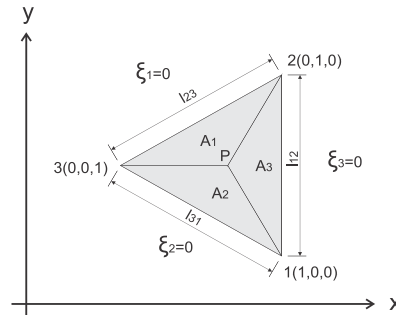


Figura 4 - Triângulo dividido em áreas

Fonte: Assan, 2003, p, 119.

Da Figura 4 podemos extrair as seguintes conclusões:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (22)$$

$$A_1 = \frac{l_{23}(h_1\xi_1)}{2} = \xi_1 A \quad A_2 = \frac{l_{31}(h_2\xi_2)}{2} = \xi_2 A \quad A_3 = \frac{l_{12}(h_3\xi_3)}{2} = \xi_3 A \quad (23)$$

Substituindo (23) em (22) e dividindo por A (área do triângulo), resulta:

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (24)$$

Da expressão (23) podemos obter o valor de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 :

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}; \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A}; \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (25)$$

Sendo A_1 dado por:

$$A_1 = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Obtemos:

$$\xi_1 = \frac{1}{2A} [x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)] \quad (27)$$

De forma análoga obtemos:

$$\xi_2 = \frac{1}{2A} [x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_1 y_3 - x_3 y_1)] \quad (28)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2A} [x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \quad (29)$$

Em seguida, podemos determinar as coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) para cada nó do elemento T6, T10, T15 e T21:

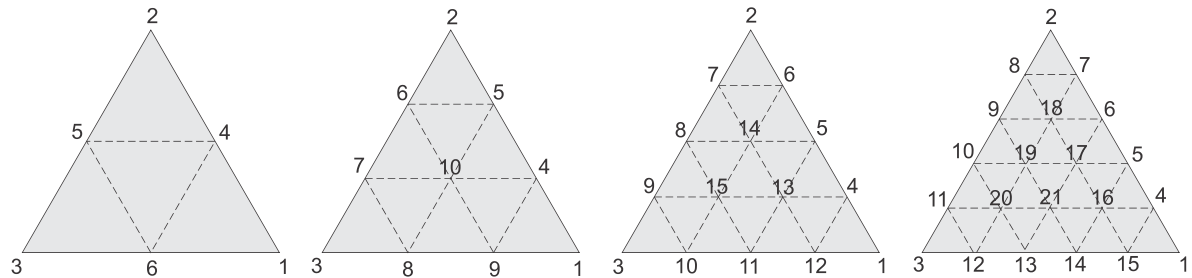


Figura 5 - Elementos T6, T10, T15 e T21

Tabela 01 - Coordenadas de Área – Elemento Triangular

Nó	T6			T10			T15			T21		
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3
01	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
02	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
03	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
04	1/2	1/2	0	2/3	1/3	0	3/4	1/4	0	4/5	1/5	0
05	0	1/2	1/2	1/3	2/3	0	1/2	1/2	0	3/5	2/5	0
06	1/2	0	1/2	0	2/3	1/3	1/4	3/4	0	2/5	3/5	0
07				0	1/3	2/3	0	3/4	1/4	1/5	4/5	0
08				1/3	0	2/3	0	1/2	1/2	0	4/5	1/5
09				2/3	0	1/3	0	1/4	3/4	0	3/5	2/5
10				1/3	1/3	1/3	1/4	0	3/4	0	2/5	3/5
11							1/2	0	1/2	0	1/5	4/5
12							3/4	0	1/4	1/5	0	4/5
13							1/2	1/4	1/4	2/5	0	3/5
14							1/4	1/2	1/4	3/5	0	2/5
15							1/4	1/4	1/2	4/5	0	1/5
16										3/5	1/5	1/5
17										2/5	2/5	1/5
18										1/5	3/5	1/5
19										1/5	2/5	2/5
20										1/5	1/5	3/5
21										2/5	1/5	2/5

Assan (2003) mostra que o polinômio completo que representa a função hermitiana pode ser obtido através do triângulo de pascal conforme Figura 6.

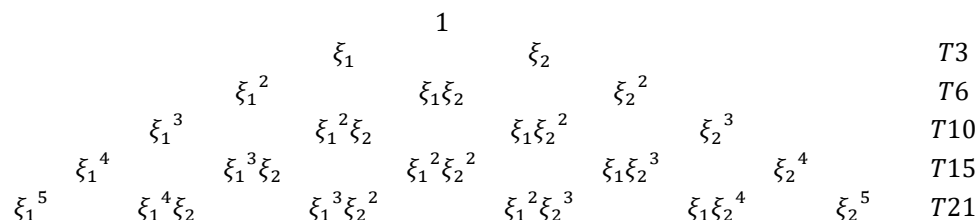


Figura 6 – Triângulo Pascal

Em seguida, substituímos as coordenadas de cada nó em seu respectivo polinômio completo, formando um sistema de equações com o qual será possível determinar as constantes das funções de interpolação. Tomemos como exemplo o elemento T6, sendo sua função de forma:

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = c_1 + c_2\xi_1 + c_3\xi_2 + c_4\xi_1^2 + c_5\xi_1\xi_2 + c_6\xi_2^2 \quad (30)$$

Onde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 são constantes.

Substituindo as coordenadas de área na expressão (30) obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} u_1(1, 0, 0) &= c_1 + c_2 + c_4 \\ u_2(0, 1, 0) &= c_1 + c_3 + c_6 \\ u_3(0, 0, 1) &= c_1 \\ u_4(1/2, 1/2, 0) &= c_1 + c_2/2 + c_3/2 + c_4/4 + c_5/4 + c_6/4 \\ u_5(0, 1/2, 1/2) &= c_1 + c_3/2 + c_6/4 \\ u_6(1/2, 0, 1/2) &= c_1 + c_2/2 + c_4/4 \end{aligned} \quad (31)$$

De posse do valor das constantes, basta substituir na expressão (30), obtendo assim as funções de forma para cada nó do elemento T6, são elas:

$$u = \sum_{i=1}^6 u_i \Phi_i \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) & \Phi_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ \Phi_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) & \Phi_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ \Phi_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) & \Phi_6 &= 4\xi_1\xi_3 \end{aligned} \quad (33)$$

De forma análoga podemos determinar as funções de forma para os demais elementos:

Tabela 02 – Funções de Forma		
Elemento T10	Elemento T15	Elemento T21
$\Phi_1 = \frac{1}{2}\xi_1(3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2)$	$\Phi_1 = \frac{1}{3}\xi_1(2\xi_1 - 1)(4\xi_1 - 1)(4\xi_1 - 3)$	$\Phi_1 = \frac{1}{24}\xi_1(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)(5\xi_1 - 3)(5\xi_1 - 4)$
$\Phi_2 = \frac{1}{2}\xi_2(3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2)$	$\Phi_2 = \frac{1}{3}\xi_2(2\xi_2 - 1)(4\xi_2 - 1)(4\xi_2 - 3)$	$\Phi_2 = \frac{1}{24}\xi_2(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)(5\xi_2 - 3)(5\xi_2 - 4)$
$\Phi_3 = \frac{1}{2}\xi_3(3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2)$	$\Phi_3 = \frac{1}{3}\xi_3(2\xi_3 - 1)(4\xi_3 - 1)(4\xi_3 - 3)$	$\Phi_3 = \frac{1}{24}\xi_3(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)(5\xi_3 - 3)(5\xi_3 - 4)$
$\Phi_4 = \frac{9}{2}\xi_1\xi_2(3\xi_1 - 1)$	$\Phi_4 = \frac{16}{3}\xi_1\xi_2(2\xi_1 - 1)(4\xi_1 - 1)$	$\Phi_4 = \frac{25}{24}\xi_1\xi_2(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)(5\xi_1 - 3)$
$\Phi_5 = \frac{9}{2}\xi_1\xi_2(3\xi_2 - 1)$	$\Phi_5 = 4\xi_1\xi_2(4\xi_1 - 1)(4\xi_2 - 1)$	$\Phi_5 = \frac{25}{12}\xi_1\xi_2(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)(5\xi_2 - 1)$
$\Phi_6 = \frac{9}{2}\xi_2\xi_3(3\xi_2 - 1)$	$\Phi_6 = \frac{16}{3}\xi_1\xi_2(2\xi_2 - 1)(4\xi_2 - 1)$	$\Phi_6 = \frac{25}{12}\xi_1\xi_2(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)(5\xi_1 - 1)$
$\Phi_7 = \frac{9}{2}\xi_2\xi_3(3\xi_3 - 1)$	$\Phi_7 = \frac{16}{3}\xi_2\xi_3(2\xi_2 - 1)(4\xi_2 - 1)$	$\Phi_7 = \frac{25}{24}\xi_1\xi_2(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)(5\xi_2 - 3)$
$\Phi_8 = \frac{9}{2}\xi_1\xi_3(3\xi_3 - 1)$	$\Phi_8 = 4\xi_2\xi_3(4\xi_2 - 1)(4\xi_3 - 1)$	$\Phi_8 = \frac{25}{24}\xi_2\xi_3(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)(5\xi_2 - 3)$
$\Phi_9 = \frac{9}{2}\xi_1\xi_3(3\xi_1 - 1)$	$\Phi_9 = \frac{16}{3}\xi_2\xi_3(2\xi_3 - 1)(4\xi_3 - 1)$	$\Phi_9 = \frac{25}{12}\xi_2\xi_3(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)(5\xi_3 - 1)$
$\Phi_{10} = 27\xi_1\xi_2\xi_3$	$\Phi_{10} = \frac{16}{3}\xi_3\xi_1(2\xi_3 - 1)(4\xi_3 - 1)$	$\Phi_{10} = \frac{25}{12}\xi_2\xi_3(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)(5\xi_2 - 1)$
	$\Phi_{11} = 4\xi_3\xi_1(4\xi_3 - 1)(4\xi_1 - 1)$	$\Phi_{11} = \frac{25}{24}\xi_2\xi_3(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)(5\xi_3 - 3)$
	$\Phi_{12} = \frac{16}{3}\xi_3\xi_1(2\xi_1 - 1)(4\xi_1 - 1)$	$\Phi_{12} = \frac{25}{24}\xi_3\xi_1(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)(5\xi_3 - 3)$
	$\Phi_{13} = 32\xi_1\xi_2\xi_3(4\xi_1 - 1)$	$\Phi_{13} = \frac{25}{12}\xi_3\xi_1(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)(5\xi_1 - 1)$
	$\Phi_{14} = 32\xi_1\xi_2\xi_3(4\xi_2 - 1)$	$\Phi_{14} = \frac{25}{12}\xi_3\xi_1(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)(5\xi_3 - 1)$
	$\Phi_{15} = 32\xi_1\xi_2\xi_3(4\xi_3 - 1)$	$\Phi_{15} = \frac{25}{24}\xi_3\xi_1(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)(5\xi_1 - 3)$
		$\Phi_{16} = \frac{125}{6}\xi_1\xi_2\xi_3(5\xi_1 - 1)(5\xi_1 - 2)$
		$\Phi_{17} = \frac{125}{4}\xi_1\xi_2\xi_3(5\xi_1 - 1)(5\xi_2 - 1)$
		$\Phi_{18} = \frac{125}{6}\xi_1\xi_2\xi_3(5\xi_2 - 1)(5\xi_2 - 2)$
		$\Phi_{19} = \frac{125}{4}\xi_1\xi_2\xi_3(5\xi_2 - 1)(5\xi_3 - 1)$
		$\Phi_{20} = \frac{125}{6}\xi_1\xi_2\xi_3(5\xi_3 - 1)(5\xi_3 - 2)$

		$\Phi_{21} = \frac{125}{4} \xi_1 \xi_2 \xi_3 (5\xi_3 - 1)(5\xi_1 - 1)$
--	--	--

De posse das funções de forma podemos determinar a matriz B apresentada na expressão (20). Em termos de coordenadas de área resulta:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Com i variando de 1 a n , onde n é o número de nós do elemento, sendo as derivadas parciais dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \quad (35)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \quad (36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \quad (37)$$

Onde:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial y} = \frac{x_l - x_m}{2A} = \frac{a_k}{2A} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x} = \frac{y_l - y_m}{2A} = \frac{b_k}{2A} \quad (39)$$

Para $k, l, m=1, 2, 3$.

Tomemos o elemento T6 como exemplo para obtermos a matriz B, basta substituir as funções de forma (33) na expressão (34), resultando de forma transposta:

$$B^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1(4\xi_1 - 1) & 0 & a_1(4\xi_1 - 1) \\ 0 & a_1(4\xi_1 - 1) & b_1(4\xi_1 - 1) \\ b_2(4\xi_2 - 1) & 0 & a_2(4\xi_2 - 1) \\ 0 & a_2(4\xi_2 - 1) & b_2(4\xi_2 - 1) \\ b_3(4\xi_3 - 1) & 0 & a_3(4\xi_3 - 1) \\ 0 & a_3(4\xi_3 - 1) & b_3(4\xi_3 - 1) \\ 4\xi_1 b_2 + 4\xi_2 b_1 & 0 & 4\xi_1 a_2 + 4\xi_2 a_1 \\ 0 & 4\xi_1 a_2 + 4\xi_2 a_1 & 4\xi_1 b_2 + 4\xi_2 b_1 \\ 4\xi_2 b_3 + 4\xi_3 b_2 & 0 & 4\xi_2 a_3 + 4\xi_3 a_2 \\ 0 & 4\xi_2 a_3 + 4\xi_3 a_2 & 4\xi_2 b_3 + 4\xi_3 b_2 \\ 4\xi_1 b_3 + 4\xi_3 b_1 & 0 & 4\xi_1 a_3 + 4\xi_3 a_1 \\ 0 & 4\xi_1 a_3 + 4\xi_3 a_1 & 4\xi_1 b_3 + 4\xi_3 b_1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

De forma análoga, pode-se determinar a matriz B para os demais elementos.

Para obtermos a matriz de rigidez utilizamos a expressão (21) que pode ser apresentada da seguinte forma:

$$[K] = t \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (41)$$

Sendo “ t ” a espessura do elemento plano.

Onde [D] é a matriz de elasticidade bidimensional obtida a partir da teoria da elasticidade, podendo estar sob estado plano de deformação, expressão (3), ou sob estado plano de tensões, expressão (2).

Segundo Assan (2003) a integral da expressão (41) requer muito tempo de processamento, um método para superar esse problema seria aplicar a expressão para integral de elementos triangulares em função das coordenadas de área para elementos triangulares:

$$\beta \iint \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n dA = \beta \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} 2A \quad (42)$$

Onde β são constantes.

Com a aplicação da expressão (42) obtemos de forma simplificada a matriz de rigidez para elementos triangulares, assim como é evitada a aplicação de processos de integração analíticos ou numéricos complexos.

5 ESTRUTURA DO CÓDIGO DESENVOLVIDO

O código de elementos finitos desenvolvido para análise estática de estruturas planas é composto por dois módulos, sendo o primeiro para geração de coordenadas e conectividades para elementos de ordem superior que podem ser T6, T10, T15 e T21. O módulo seguinte é o de análise estática, onde todos os cálculos e gráficos são processados. O código foi desenvolvido com auxílio do software MATLAB.

O primeiro módulo tem início com a entrada de dados pelo usuário, onde o mesmo informa as coordenadas e conectividades da estrutura em análise, em seguida, o usuário deverá informar qual elemento o software deverá processar, sendo eles o T6, T10, T15 ou T21. Na próxima etapa o software irá gerar as coordenadas e conectividades dos novos nós para cada elemento. Partindo da malha inicial com três nós o software irá gerar as coordenadas dos novos nós para cada elemento e verificar se este nó existe, em caso positivo o software mantém o número do nó, em caso negativo será atribuído um novo valor para o número do nó, encerrada essa operação este nó será vinculado ao elemento. Este processo será repetido para cada elemento. Ao final do módulo, teremos como dados de saída as coordenadas e conectividades de acordo com a ordem do elemento escolhido, também será plotada uma imagem da malha com nós e elementos da estrutura de modo a facilitar a compreensão do usuário.

Em seguida, terá início o módulo de análise estática. O usuário deverá informar as propriedades físicas da estrutura, bem como as restrições e carregamento aplicado. Na sequência, o código realizará o cálculo dos deslocamentos e tensões para a estrutura em análise. Para o cálculo dos deslocamentos o código acumula as matrizes de rigidez locais em uma matriz global [KG]. De forma análoga, será gerado o vetor de carga global [FG], em seguida serão eliminadas as linhas e colunas com restrições das matrizes globais para então serem determinados os deslocamentos globais [DG] da estrutura, aplicando a expressão a seguir:

$$[DG] = \frac{[FG]}{[KG]} \quad (43)$$

Para o cálculo das tensões será aplicado para cada elemento a expressão (44), onde o vetor $[De]$ é composto pelos deslocamentos locais para cada elemento.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D][B][De] \quad (44)$$

Os dados de saída serão as planilhas com deslocamentos e tensões para cada nó da estrutura, sendo também plotados os gráficos da estrutura deformada, das tensões normais e tensão de cisalhamento atuante na estrutura. A seguir, é apresentado um fluxograma do funcionamento do código desenvolvido.

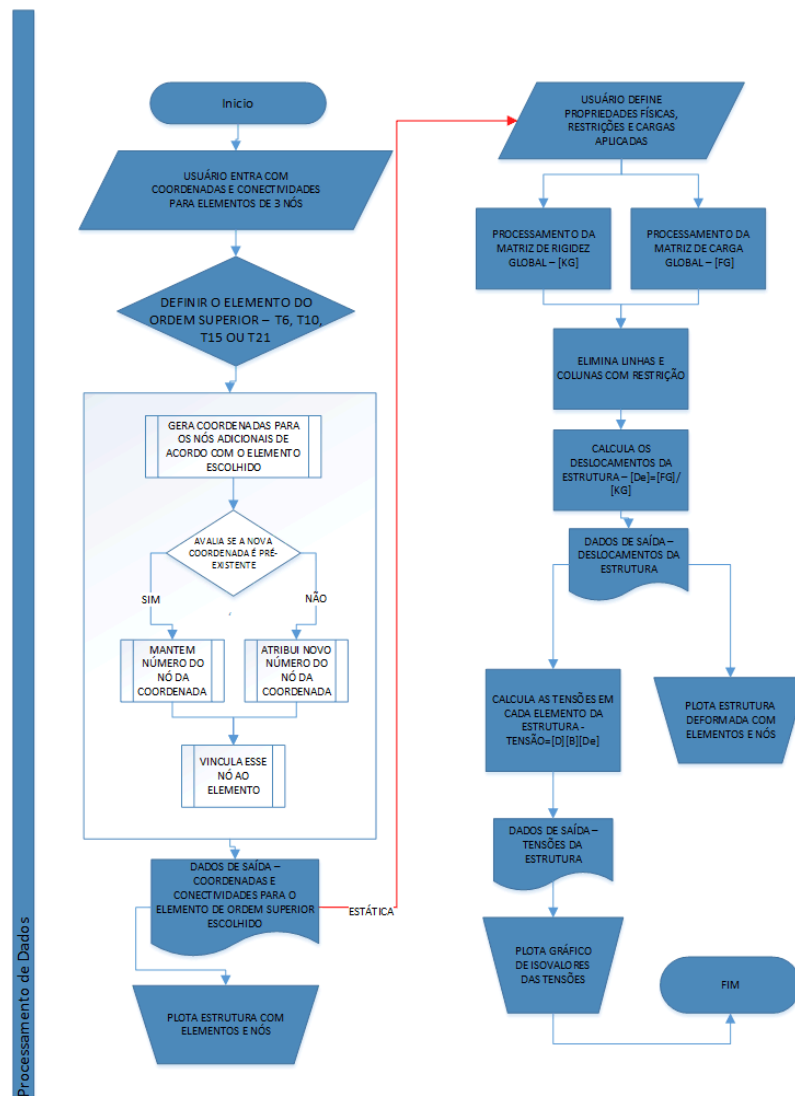


Figura 7 - Fluxograma do código para gerar malhas de ordem superior e análise estática

6 APLICAÇÕES, VALIDAÇÃO E RESULTADOS

6.1 APLICAÇÃO 01 - VIGA BIENGASTADA COM FURO

A estrutura em análise consiste em uma viga biengastada com seção transversal de cinquenta centímetros de largura por dois metros de altura, com comprimento de dez metros e um furo com diâmetro de um metro no meio do vão. Esta viga está sob a ação de uma carga distribuída $q=10\text{kN/m}$. A referida estrutura possui módulo de elasticidade de 200GPa e coeficiente de Poisson de $0,30$. A Figura 8 ilustra a estrutura em análise.

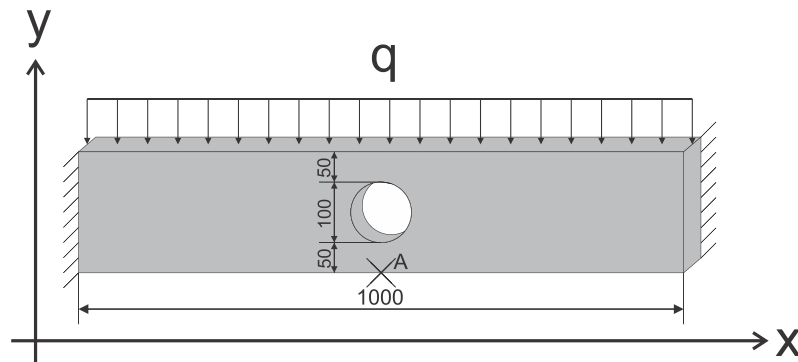


Figura 8 - Viga Biengastada (Cotas em centímetros)

O programa inicia com as coordenadas e conectividades para a referida estrutura com 12, 19, 86, 172 e 722 elementos de três nós obtidos com auxílio do software GID. Na sequência, o código processa as informações fornecendo as coordenadas e conectividades para elementos de 6, 10, 15 e 21 nós, além da imagem da viga mostrando os nós e elementos. Em seguida, definidas restrições e vetor de carga, inicia-se o processamento dos dados.

Após o processamento o software fornece os deslocamentos e tensões para cada nó da estrutura em análise, assim como também plota a imagem da viga deformada e o gráfico de isovalores para as tensões atuantes na viga. Como forma de exemplificar, seguem as imagens para estrutura com 86 elementos – T21.

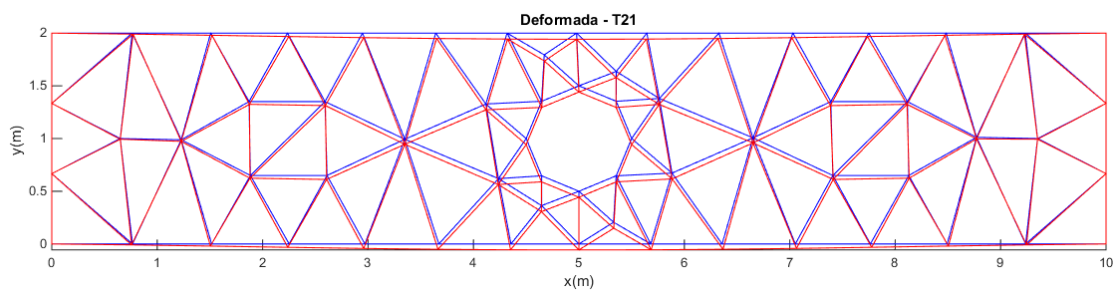


Figura 9 – Deformada viga biengastada

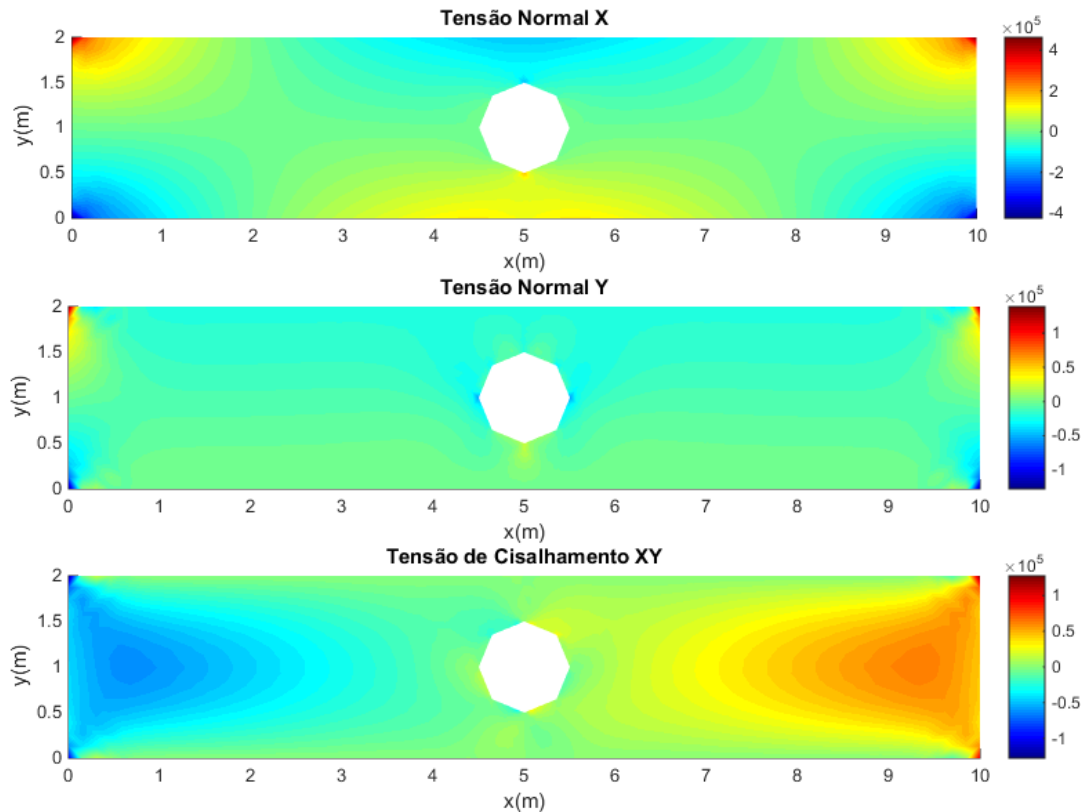


Figura 10 – Tensões viga biengastada (N/m²)

Os resultados foram comparados com os valores obtidos através do software SAP2000. Para verificar a eficiência do processamento dos dados, foi realizada uma comparação entre dois métodos de processamento de dados, sendo o primeiro método utilizando matriz explícita apresentado neste trabalho e o segundo método utilizando a quadratura de Gauss (integração numérica). A Tabela 03 apresenta os resultados para flecha e tensões no meio do vão da face inferior da viga (ponto A), e a Figura 11 apresenta o gráfico de convergência dos resultados, a Figura 12 mostra o “número de elementos x tempo processamento” para cada tipo de elemento e as Figuras 13 e 14 expõem, respectivamente, o “tempo de processamento x erro” e o “número de elementos x erro” para cada tipo de elemento.

Tabela 03 –Análise de Convergência - Viga Biengastada										
Elemento		Nr. Nós	Deslocamento (m)						Tensão (N/m2)	
			Eixo Y	Erro (%)	Tempo de Cálculo deslocamentos (s)		Tempo total Processamento (s)		Tensão X	Erro (%)
Tipo	Quant				Matriz Explícita	Int. Numérica	Matriz Explícita	Int. Numérica		
T3	12	12	-2,25E-06	60,12%	0,05	-	1,84	-	110.642,26	3,93%
	19	18	-2,82E-06	49,93%	0,05	-	1,87	-	39.873,17	65,38%
	86	64	-4,46E-06	20,94%	0,06	-	2,17	-	95.050,21	17,47%
	172	116	-5,00E-06	11,28%	0,07	-	2,50	-	110.260,69	4,26%
	722	421	-5,46E-06	3,24%	0,13	-	4,61	-	109.718,11	4,73%
T6	12	36	-3,07E-06	45,64%	0,07	0,26	1,85	1,52	-8.479,35	107,36%

	19	55	-5,15E-06	8,68%	0,07	0,15	1,98	1,46	127.144,04	-10,40%
	86	214	-5,58E-06	1,06%	0,10	0,28	2,39	2,00	118.632,73	-3,01%
	172	404	-5,61E-06	0,43%	0,14	0,45	2,93	2,70	115.853,75	-0,59%
	722	1564	-5,64E-06	0,05%	0,52	1,57	6,64	6,96	114.740,99	0,37%
T10	12	72	-5,20E-06	7,76%	0,14	1,64	1,99	2,93	-10.061,16	108,74%
	19	111	-5,58E-06	0,98%	0,14	1,80	2,10	3,17	122.847,54	-6,67%
	86	450	-5,63E-06	0,22%	0,27	3,47	2,94	5,53	113.716,60	1,26%
	172	864	-5,64E-06	0,06%	0,45	5,73	3,89	8,63	113.571,04	1,39%
	722	3429	-5,64E-06	-0,06%	1,92	20,24	10,61	28,41	113.776,08	1,21%
T15	12	120	-5,55E-06	1,65%	0,26	7,38	2,18	8,76	-7.608,01	106,61%
	19	186	-5,63E-06	0,12%	0,29	7,87	2,36	9,34	122.435,26	-6,31%
	86	772	-5,64E-06	0,04%	0,59	15,52	3,75	18,05	113.204,99	1,71%
	172	1496	-5,64E-06	-0,04%	1,06	25,38	5,47	29,09	113.746,38	1,24%
	722	6016	-5,64E-06	-0,09%	5,46	101,36	18,09	113,48	113.548,95	1,41%
T21	12	180	-5,53E-06	2,01%	0,34	-	2,44	-	228.788,10	-98,65%
	19	280	-5,65E-06	-0,15%	0,38	-	2,71	-	124.564,26	-8,16%
	86	1180	-5,64E-06	-0,03%	0,82	-	5,18	-	113.589,56	1,37%
	172	2300	-5,64E-06	-0,08%	1,55	-	8,27	-	113.949,89	1,06%
	722	9325	-5,65E-06	-0,11%	14,14	-	48,91	-	113.526,35	1,43%
SAP 2000	4842	5041	-5,64E-06						115.170,00	

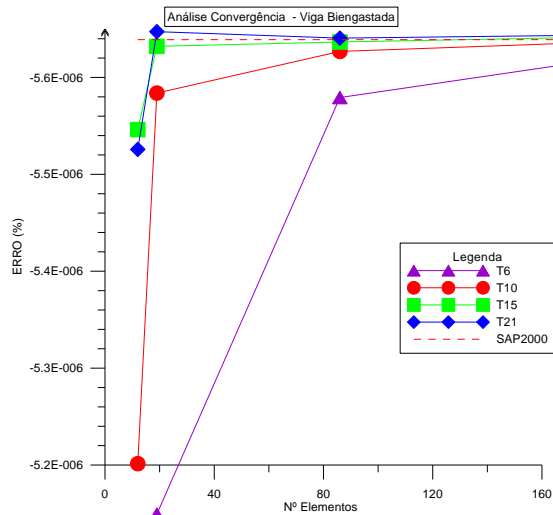


Figura 11 – Análise de Convergência

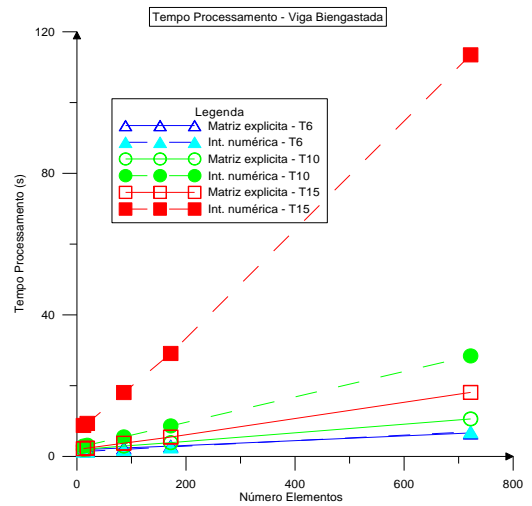


Figura 12 – N° Elementos x Tempo Processamento

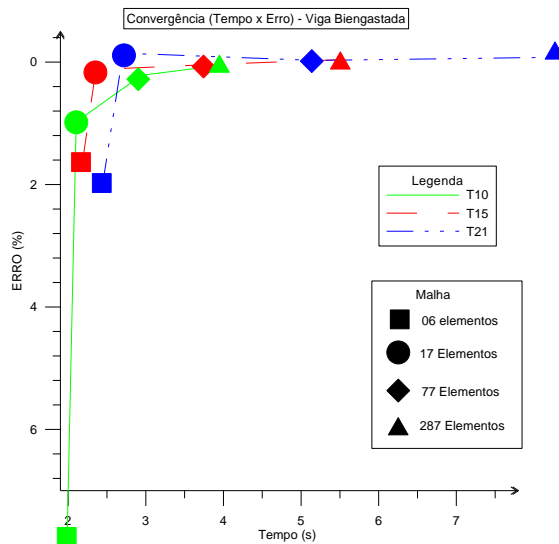


Figura 13 – Tempo x Erro

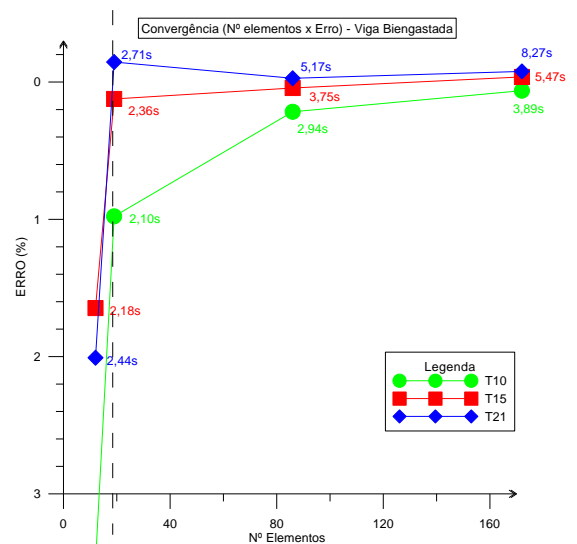


Figura 14 – N° elementos x Erro

6.2 APLICAÇÃO 02 - CONSOLE

A estrutura em análise consiste de um console com a base engastada e as demais extremidades livres, sua seção transversal é de cinquenta centímetros de largura por dois metros de altura. Esta estrutura está sob a ação de uma carga concentrada $P_x=10\text{kN}$ no eixo X e uma carga concentrada $P_y=50\text{kN}$ no eixo Y, ambas aplicadas no meio do vão da extremidade em balanço. A referida estrutura possui módulo de elasticidade de 200GPa e coeficiente de Poisson de $0,30$. A Figura 15 ilustra a estrutura em estudo.

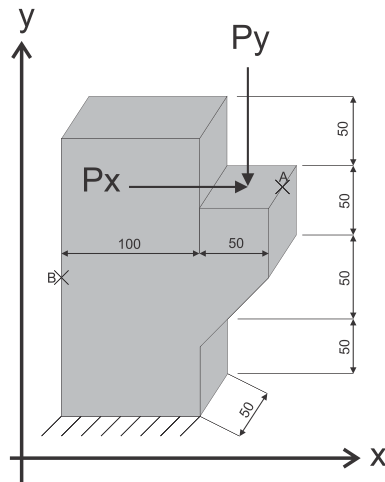


Figura 15 – Console (cotas em centímetros)

Assim como no caso anterior, alimentou-se o programa com as coordenadas e conectividades para a referida estrutura com 06, 17, 77 e 287 elementos de três nós, obtidos com auxílio do software GID. Como forma de exemplificar, seguem as imagens para estrutura com 77 elementos – T21.

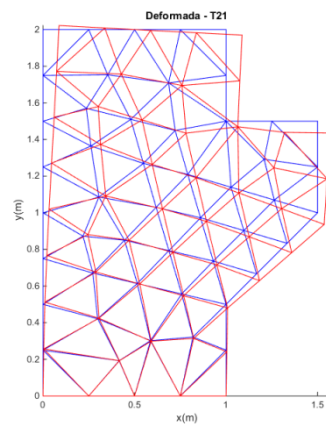
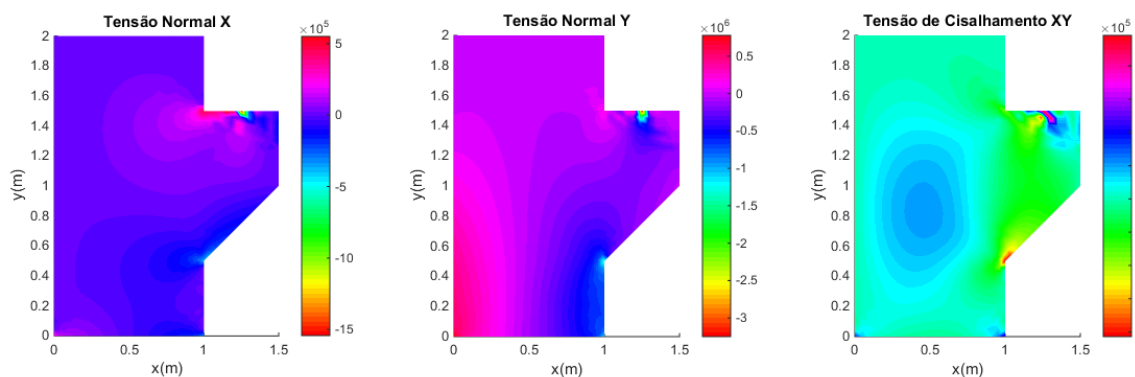


Figura 16 – Deformada Console

Figura 17 – Tensões Console (N/m²)

A Tabela 04 apresenta os resultados obtidos para flecha na extremidade em balanço da estrutura (ponto A) e tensões no ponto médio da face esquerda da estrutura (ponto B) e as Figuras 18 a 21 apresentam os gráficos com a análise dos dados.

Tabela 04 - Análise de convergência - Console										
Elemento		Nr. Nós	Deslocamento (m)						Tensão (N/m ²)	
			Eixo Y	Erro (%)	Tempo de Cálculo deslocamentos (s)		Tempo total Processamento (s)		Tensão Y	Erro (%)
Tipo	Quant				Matriz Explícita	Int. Numérica	Matriz Explícita	Int. Numérica		
T3	06	08	-2,68E-06	58,70%	0,04	-	1,77	-	-78.861,67	142,92%
	17	16	-4,14E-06	36,13%	0,04	-	1,79	-	81.887,95	55,44%
	77	53	-5,58E-06	14,05%	0,04	-	2,05	-	146.541,12	20,25%
	287	287	-6,27E-06	3,40%	0,08	-	3,59	-	170.063,42	7,45%
T6	06	21	-5,46E-06	15,81%	0,04	0,11	1,79	1,33	225.145,08	-22,52%
	17	48	-6,29E-06	2,98%	0,05	0,13	1,83	1,43	184.176,28	-0,23%
	77	182	-6,39E-06	1,47%	0,07	0,23	2,25	1,89	186.923,52	-1,72%
	287	1078	-6,45E-06	0,58%	0,30	1,02	4,92	4,99	183.742,86	0,01%
T10	06	40	-6,32E-06	2,53%	0,09	1,50	1,87	2,73	200.887,44	-9,32%
	17	97	-6,46E-06	0,35%	0,11	1,61	2,02	2,94	185.513,40	-0,96%
	77	388	-6,45E-06	0,56%	0,21	3,10	2,67	4,99	183.878,55	-0,07%
	287	2374	-6,48E-06	0,18%	1,17	13,93	7,56	19,83	183.572,63	0,10%
T15	06	65	-6,36E-06	2,01%	0,19	6,43	2,00	7,72	188.096,96	-2,36%
	17	163	-6,41E-06	1,22%	0,23	7,22	2,23	8,68	183.560,68	0,11%
	77	671	-6,47E-06	0,28%	0,50	13,91	3,33	16,18	183.659,49	0,05%
	287	4175	-6,48E-06	0,11%	3,15	62,25	12,38	70,61	183.487,16	0,15%
T21	06	96	-6,45E-06	0,61%	0,25	-	2,14	-	188.595,41	-2,63%
	17	246	-6,48E-06	0,12%	0,32	-	2,57	-	183.938,71	-0,10%
	77	1031	-6,48E-06	0,04%	0,69	-	4,62	-	183.575,95	0,10%
	287	6481	-6,48E-06	0,05%	5,30	-	21,33	-	183.468,05	0,16%
SAP 2000	960	1021	-6,49E-06						183.756,00	

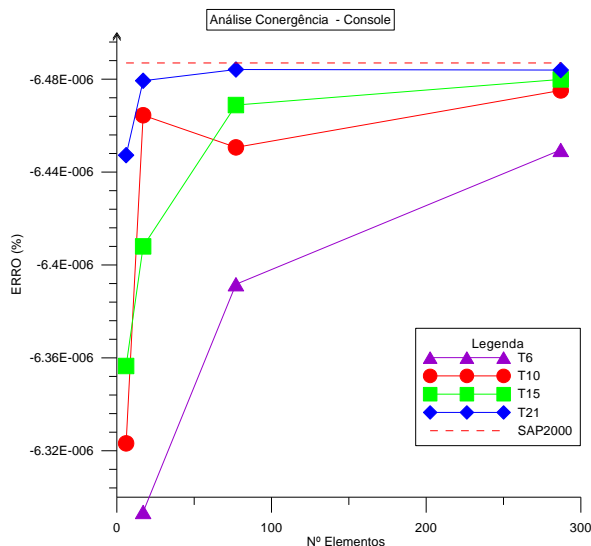


Figura 18 – Análise Convergência

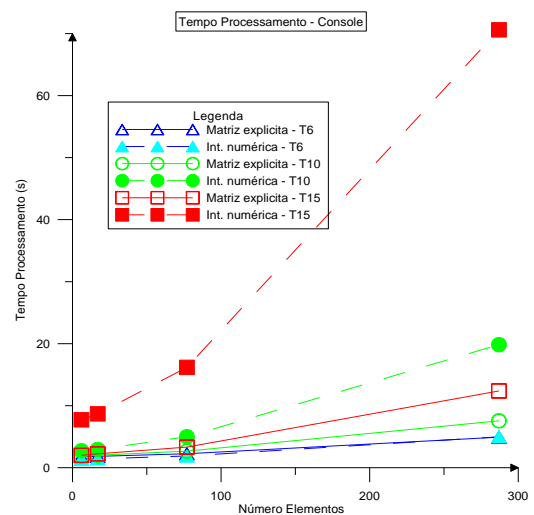


Figura 19 – Nº elementos x Tempo Processamento

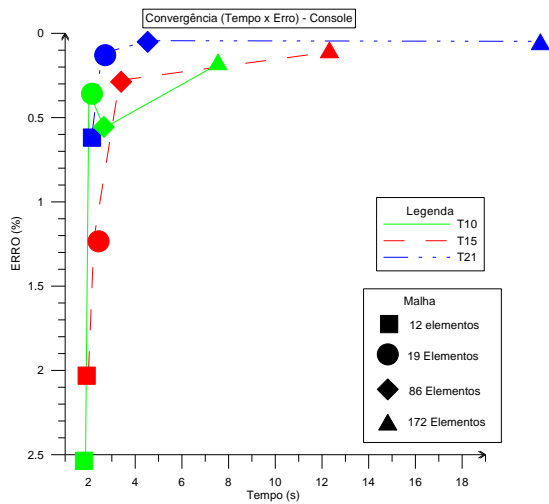


Figura 20 – Tempo x Erro

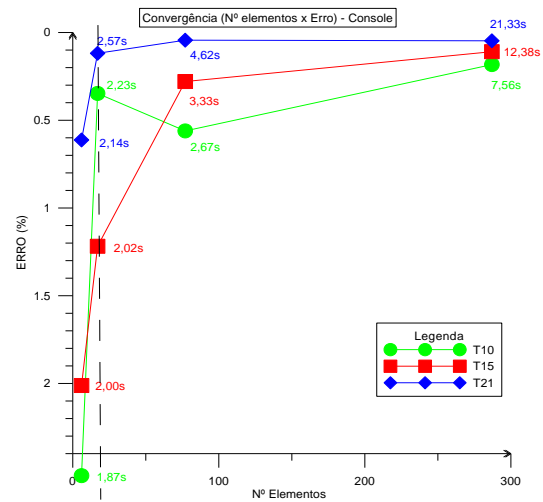


Figura 21 – Nº elementos x Erro

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após análise dos resultados, pode-se perceber que o método p-adaptativo apresenta altas taxas de convergências, superiores ao método h-adaptativo, ou seja, a elevação do grau do polinômio permite a obtenção de resultados com alto índice de precisão para poucos elementos (malhas simples). Os gráficos de convergência dos casos 01 e 02 demonstram que ao elevar-se o grau do polinômio os valores convergem para o valor obtido no software SAP2000, bem como é perceptível que o elemento T21, conforme esperado, apresenta a maior precisão entre os elementos, onde seus resultados sempre estão próximos ao exato. Com esse recurso, o usuário do software pode adaptar a ordem do elemento de acordo com o grau de complexidade do sistema em estudo, possibilitando a escolha da solução estrutural mais adequada.

Quanto ao tempo de processamento, é evidente pelos resultados obtidos nos gráficos de “Nº elementos x tempo de processamento” para os casos 01 e 02, que para elementos acima do T6 o método utilizando matrizes explícitas é superior ao método utilizando a integração numérica. A vantagem da utilização da matriz explícita é visível no momento da geração das matrizes globais do sistema onde a integração é eliminada, sendo necessária apenas uma substituição de valores na geração matriz de rigidez de cada elemento. No caso do método da integração numérica, a integração também é eliminada sendo necessária apenas a substituição dos valores nos pontos de integração para cada elemento, porém à medida que se eleva o grau do polinômio crescem os pontos de integração, ou seja, o número de substituições é maior e, por consequência, o tempo de processamento.

A análise dos gráficos “Nr. Elementos x Erro” e “Tempo x Erro” mostra que o elemento T21 possui ótima precisão e baixo custo de processamento, visto que para uma malha com poucos elementos sua precisão é maior que a dos demais elementos a um baixo tempo de processamento. Apesar do elemento T15 apresentar um custo computacional pouco menor que o elemento T21 para precisões muito próximas, o elemento T21 por ter mais nós proporciona um maior detalhamento do comportamento da estrutura com baixo incremento de tempo de processamento.

Diante do exposto, pode-se concluir que o método p-adaptativo, utilizando matrizes explícitas, apresenta ótima precisão assim como baixo custo computacional se comparado ao método h-adaptativo e integração numérica. Além de uma de suas

maiores vantagens: permitir para uma única “malha simples” que o usuário modifique a precisão dos resultados apenas elevando o grau do polinômio, sem a necessidade de discretizações adicionais do domínio.

8 REFERÊNCIAS

ANYAEGBUNAM, Amaechi J.; OJIAKO, Udechukwu G. The explicit stiffness matrix of the 15-noded cubic strain triangle. **Proceedings Of The Ice - Engineering And Computational Mechanics**, [S.I.], v. 164, n. 1, p.25-40, 1 mar. 2011. Thomas Telford Ltd.

ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2003.

CIMNE. **GID**: The Personal pre and post processor, versão 17.1.7d,[S.I.], The International Center for Numerical Methods in Engineering.

COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. **SAP2000 Ultimate**, versão 17,[S.I.], 2015.

GRIFFITHS, D. V.; HUANG, Jinsong; SCHIERMEYER, R. P.. Elastic stiffness of straight-sided triangular finite elements by analytical and numerical integration. **Communications In Numerical Methods In Engineering**, [S.I.], v. 25, n. 3, p.247-262, mar. 2009. Wiley-Blackwell.

LOGAN, Daryl L.. **A First Course in the Finite Element Method**. 4. ed. Platteville: University Of Wisconsin, 2006.

MATCHWORKS. **MATLAB**, versão R2014b,[S.I.], 2014.

MOSER, K.; SWOBODA, G. Explicit Stiffness Matrix Of The Linearly Varying Strain Triangular Element. **Computers & Structures**, [S.I.], v. 8, p.311-314, 13 jul. 1977.

NOVOTNY, A.a.; FANCELLO, E.a.. Um Refinamento H, P E Hp Adaptativo Na Análise De Flexão De Placas Semi-Espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, Catalunya, v. 14, n. 1, p.25-48, set. 1996.

RIBEIRO, Paulo Marcelo Vieira. **Elementos finitos 1**. Set de 2015. Notas de Aula UFPE.

SORIANO, Humberto Lima. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2009.

SUBRAMANIAN, G.; JEYACHANDRA, C. Convenient Generation Of Stiffness Matrices For The Family Of Plane Triangular Elements. **Computers & Structures**, [s.l.], v. 15, p.311-314, 1 jul. 1981.

VIDELA, L.; CERROLAZA, M.; APARICIO, N. Explicit Integration Of The Stiffness Matrix Of A Four-Noded-Plane-Elasticity Finite Element. **Communications In Numerical Methods In Engineering**, [S.I.], v. 12, p.731-743, 03 jan. 1996.

VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L.f. Taborda. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. 4. ed. Rio de Janeiro: Coppe/ufRJ, 2000.